平方根 — 授業再録

因数分解の難しいところでフウフウ言って、やっとホッとしたと思ったら今度は「平方根」になり、「平方根」とは何なのだと思った人も多いでしょう。

平方根は、とにかく最初の概念がつかみにくい。ここを、いろいろな角度から考え、ある 1 つの問題をちがう方法で取り組んだりすることで、「平方根」という概念を頭の中で整理していきましょう。

まずは、平方根とは何か。その根本は、「x が a の平方根である$\Leftrightarrow x^2=a$」というところから始まります。ちなみに「x が a の立方根である$\Leftrightarrow x^3=a$」となります。

$x^2=1$ なら、それを満たす整数はすぐに見つかり、$x=1, -1$　これを $x=\pm1$ と書いてもよい。$x^2=4$ なら、$x=\pm2$　$x^2=9$ なら、$x=\pm3$　$x^2=16$ なら、$x=\pm4$　$x^2=25$ なら、$x=\pm5$　$x^2=36$ なら、$x=\pm6$　$x^2=49$ なら、$x=\pm7$　$x^2=64$ なら、$x=\pm8$　$x^2=81$ なら、$x=\pm9$　要は、九九の、$2\times2=4$、$3\times3=9$、$4\times4=16$、$5\times5=25$、……の部分なら、楽に平方根は見つかるということです。もちろん、数が大きくなってくると、見つけるのは難しくなってくるのですが、因数分解のところで習った、素因数分解を使えば解決できるところもあります。$225=3^2\times5^2=(3\times5)^2=15^2$ となるので、225 の平方根は±15 という感じです。$169=13^2$ のように、ある程度覚えていないとだめなものもあります。$121=11^2$　$289=17^2$　$361=19^2$ くらいを覚えておけばよいでしょう。

では、$x^2=2$ はどうでしょう。これを満たすきちんとした数は見つかりません。$1.4\times1.4=1.96$　$1.41\times1.41=1.9881$　$1.414\times1.414=1.999396$　というように、2 にひたすら近い数は見つかりますが、ぴったり 2 になる数は見つからない。それで、その変な数（これを「無理数」と言います）を、$\sqrt{2}$ と$-\sqrt{2}$ という記号で表すことにします。$\sqrt{2}$ を「ルート 2」と呼びます。すなわち、$x^2=2$ を満たす x は、$x=\pm\sqrt{2}$　同じように、$x^2=3$ なら、$x=\pm\sqrt{3}$　$x^2=5$ なら $x=\pm\sqrt{5}$　$x^2=7$ なら、$x=\pm\sqrt{7}$ ……というふうに記号を定めます。

$\sqrt{2}=1.41421356237309504880168872420 97\cdots\cdots$（ひとよひとよにひとみごろ）
$\sqrt{3}=1.7320508075688772935274463415059\cdots\cdots$（ひとなみにおごれや）
$\sqrt{5}=2.2360679774997896964091736687313\cdots\cdots$（ふじさんろくおーむなく）
$\sqrt{6}=2.4494897427831780981972840747059\cdots\cdots$（によよくよく）
$\sqrt{7}=2.6457513110645905905016157536393\cdots\cdots$（なにむしいない）
$\sqrt{10}=3.1622776601683793319988935444432\cdots\cdots$（みいろにならぶや）

というふうな覚え方もあります。注意してほしいのは、$x^2=2$ を満たす 2 つの数のうち、正の数のほうを$\sqrt{2}$ と決めたこと。そのとき、負の数は$-\sqrt{2}$ です。

さてそこで、問題になってくるのは、$x^2=4$ や $x^2=9$ のとき、それぞれ、$x=\pm\sqrt{4}$ 、$x=\pm\sqrt{9}$ と書いてもまちがいではないということ。前に、$x=\pm2$、$x=\pm3$ がすぐ見つかるといっていたことを考えると、$\sqrt{4}=2$　$\sqrt{9}=3$ が成り立つのですが、それは分かりますか。平方根において、この部分がはっきりすることが、いちばん大切になります。別の例で言えば、さきほどの 225 を使うと、「225 の平方根は、きれいな数で見つけることができて、その数は 15 と-15 である」　ところで、$\sqrt{\ }$の記号の決め方から考えて、「225 の平方根の正の数のほうを$\sqrt{225}$、負の数のほうを$-\sqrt{225}$ といってもよい」　これらを合わせて考えると、「$\sqrt{225}=15$、$-\sqrt{225}=-15$ である」と判断できる……ということになります。

頭の中はきっちり整理できていますか。例えば「9 を平方（2 乗）すると、81 になる」「-9 を平方（2 乗）しても 81 になる」　逆に「81 の平方根は 9 と-9 の 2 つ見つかる」　「81

の平方根は、$\sqrt{81}$ と$-\sqrt{81}$ の 2 つあるといってもよい」　よって、「$\sqrt{81}=9$　$-\sqrt{81}=-9$ でなければならない」これらのことが、混乱せず、頭にきっちり入っていますか。

こんな例はどうでしょう。「$\sqrt{9^2}$ 」　これは、$\sqrt{\ }$ の中身だけを計算してしまえば、$\sqrt{9^2}=\sqrt{81}=9$ となります。同じように「$\sqrt{(-9)^2}$ 」も考えてみてください。これも$\sqrt{\ }$ の中身だけを計算してしまえば、$\sqrt{(-9)^2}=\sqrt{81}=9$ となって、同じ結果になります。$\sqrt{\ }$ の中身は計算してしまえばすっきりする。では、「$-\sqrt{9^2}$ 」や「$-\sqrt{(-9)^2}$ 」は大丈夫ですか。$\sqrt{\ }$ の外のマイナスは、そのまま残ります。どちらも、「$-\sqrt{9^2}=-\sqrt{81}=-9$」「$-\sqrt{(-9)^2}=-\sqrt{81}=-9$」ですよね。大丈夫ですか。「$\sqrt{9^2}$ を 2 乗すると何になりますか」これも、$\sqrt{9^2}=\sqrt{81}=9$ であることを踏まえれば、単なる「9 を 2 乗すると 81 になる」と同じことです。同じように「$-\sqrt{(-9)^2}$ を 2 乗しても 81 になる」のですが、わかりますか。

「$\sqrt{\ }$ の中は計算してしまおう」「$\sqrt{\ }$ の外の±は、普通の数の正負と同じようにあつかおう」この 2 つは、これからも、心の中に念じておくようにしましょう。その大切な 2 つの約束に、もう 1 つ付け加えるなら、「困ったときは、全部 2 乗してしまおう」というのがあります。例えば「$7<\sqrt{x}<8$ を満たす整数 x の個数」を求める問題ならば、$7^2=49$　$8^2=64$　そして、$\left(\sqrt{x}\right)^2=x$ となります。すなわち、「$7<\sqrt{x}<8$」のとき、「$7^2<\left(\sqrt{x}\right)^2<8^2$」が成り立ちます。それは、計算して「$49<x<64$」これを満たす整数は、$x$=50, 51, 52, ……, 63　これは、全部で 63−50+1=14 個あります。1 を最後にたすのはなぜかわかりますか。最小の整数△から最大の整数〇まで、〇−△+1　個の数がある。これは当たり前のことと思えるようにしてください。

ところで、こうした無理数は、

$\sqrt{3}$=1.7320508……（ひとなみにおごれや）=$\underline{\underline{1}}$+0.7320508……

$\sqrt{5}$=2.2360679……（ふじさんろくおーむなく）=$\underline{\underline{2}}$+0.2360679……

$\sqrt{7}$=2.64575……（なにむしいない）=$\underline{\underline{2}}$+64575……

というように、「整数の部分」と「0 より大きく 1 より小さい小数の部分」に分けることができます。$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$ のように、だいたいわかっている数字ならばよいが、$\sqrt{99}$，$\sqrt{143}$ のように、見当がつきにくいのはどうしましょう。

$9=\sqrt{81}<\sqrt{99}<\sqrt{100}=10$ と考えれば、$\sqrt{99}$ が 9 より大きく 10 より小さい数であることがわかります。実際、$\sqrt{99}$ は、$\sqrt{99}$=9.9498743710661995473447982100121……というような数です。よって、$\sqrt{99}$ の整数部分は 9 になります。

同じように、$11<\sqrt{121}<\sqrt{143}<\sqrt{144}=12$ なので、$\sqrt{143}$ の整数部分は 11 とわかります。実際、$\sqrt{143}$=11.958260743101398021129840756196……という数です。

$\sqrt{46387}$ とかはどうでしょう。$215=\sqrt{46225}<\sqrt{46387}<\sqrt{46656}=216$ であり、実際、$\sqrt{46387}$=215.37641467904511479817314645404……という数なのですが、そんな数を見つけるのは至難の業。でも、心配はいらない。「$\sqrt{46387}$ の整数部分は何けたになりますか」程度の問題しか出ないので、「けた数」だけわかればよい。$\sqrt{100}=10$　$\sqrt{10000}=100$　$\sqrt{1000000}=1000$　$\sqrt{100000000}=10000$　くらいをわかっていれば、$100=\sqrt{10000}<\sqrt{46387}<\sqrt{1000000}=1000$ より、$\sqrt{46387}$ は 100 より大きくて、1000 より小さい数であること、すなわち、その整数部分は「3 けた」であることがわかるのです。

$\sqrt{3}$=1.7320508……（ひとなみにおごれや）=$\underline{\underline{1}}$+0.7320508……
$\sqrt{5}$=2.2360679……（ふじさんろくおーむなく）=$\underline{\underline{2}}$+0.2360679……

くらいなら、覚えていることもできるのですが、$\sqrt{6.4}$とか、$\sqrt{\dfrac{3}{7}}$とかは、どう考えればよいのでしょう。この辺になってくると、手探りで計算していくしか手がありません。まず、2=$\sqrt{4}$＜$\sqrt{6.4}$＜$\sqrt{9}$=3 より、$\sqrt{6.4}$は 2 より大きく 3 より小さい。2 と 3 の真ん中の数の 2.5 は、2.5=$\sqrt{2.5^2}$=$\sqrt{6.25}$と考えれば、$\sqrt{6.4}$は 2.5 より大きい。2.6=$\sqrt{2.6^2}$=$\sqrt{6.76}$なので、$\sqrt{6.4}$は 2.6 より小さい。すなわち、2.5＜$\sqrt{6.4}$＜2.6 であることがわかる。さらに 2.55=$\sqrt{6.5025}$ 2.54=$\sqrt{6.4516}$　2.53=$\sqrt{6.4009}$　2.52=$\sqrt{6.3504}$　やっと見つかった。よって、2.52=$\sqrt{6.3504}$＜$\sqrt{6.4}$＜$\sqrt{6.4009}$=2.53 となり、やっと$\sqrt{6.4}$が 2.52 と 2.53 の間にあることが判明する……という感じです。$\dfrac{3}{7}$=3÷7=0.428571428……も、こんな感じで探してみてください。
（0.65^2=0.4225 まで、いかに早くたどりつけるか……けっこう気が遠くなる作業です）

ところで、この$\dfrac{3}{7}$ですが、$\dfrac{3}{7}$=3÷7=0.428571428571428571428571428571428……①　というふうに、「428571」がくりかえされています。これと、さきほどの$\sqrt{\ }$の数と見比べてください。例えば、$\sqrt{5}$=2.2360679774997896964091736687313……②　をよく見ても、どこもくりかえしになるところが出てきませんね。このあと、どれだけけたを下げて計算しても、永遠にくりかえしになることはありません。①のようなくりかえしが見つかる小数を、「循環する小数（略して循環小数）」と言い、②のようにくりかえしが見つからない小数を、「循環しない小数」と呼んで、区別しています。①も②も、無限に続くところは同じなので、①と②を合わせて、「無限小数」と言って、1.52　3.289　0.0021 のような「有限小数」と区別しています。さらにさきほど、$\sqrt{2}$や$\sqrt{5}$のような数には、「無理数」という名前がついていると言ったことを覚えていますか。$\sqrt{4}$や$\sqrt{9}$は、$\sqrt{\ }$はついていますが、$\sqrt{4}$=2 や$\sqrt{9}$=3 と直せるので、これは「無理数」とは言いません。

再び$\dfrac{3}{7}$ですが、$\dfrac{3}{7}$=3÷7=0.428571428571428571428571428571428……=$0.\dot{4}2857\dot{1}$と表すことにします。4 の上と 1 の上に小さな点（dot）がついているのが見えますか。小さな点から次の小さな点までをくりかえしているという意味です。0.7777777……=$0.\dot{7}$のような場合は、dot は 1 つでよいです。こうした循環する小数は、いつでも分数に直すことができます。例えば、$0.\dot{2}4\dot{6}$=0.246246246246246246……=x とします。そのとき、1000x を作って、x の上に並べて書いてみます。

1000x= 246.$\dot{2}4\dot{6}$=246.246246246246246246……①
　　x=　0.$\dot{2}4\dot{6}$=　0.246246246246246246……②

ここで、①−②をやってみましょう。左辺は 999x になりますね。右辺はどうでしょう。小数部分はまったく同じくりかえしなので、消えてしまうと思ってよいでしょう（実際はここは難しい問題で、大学まで行って、「選択公理」を学んでやっと解決するところです）。そうすると、999x=246 となり、x=$\dfrac{246}{999}$=$\dfrac{82}{333}$というふうに、分数に直すことができます。こうやって、分数に直すことができる数のことを、「有理数」と言います。さきほどでた

1.52　3.289　0.0021 のような「有限小数」も、それぞれ、$1.52=\frac{152}{100}=\frac{38}{25}$　$3.289=\frac{3289}{1000}$　$0.0021=\frac{21}{10000}$ となるので「有理数」です。自然数や整数も、それぞれ、$27=\frac{27}{1}$　$-403=-\frac{403}{1}$ というふうに、無理やり分数に直せるので、有理数です。

有限小数と、循環する無限小数は、分数に直せるので、有理数としてまとめられます。これらを表にまとめるとこんな感じです。

小数	有限小数		有理数
	無限小数	循環する無限小数	
		循環しない無限小数	無理数

さあどうでしょう。多少は自信がついてきましたか。$\frac{121}{144}$ の平方根は何ですか。$\left(\frac{11}{12}\right)^2$ と見抜いて、$\pm\frac{11}{12}$ と、すぐに答えられますか。$\{-\sqrt{(-5)^2}\}^2$ のような計算ももう大丈夫ですか。√ の中身を計算して、√ の外のマイナスはふつうの数のようにあつかって、$\left(-\sqrt{25}\right)^2=(-5)^2=25$ とすることはできますか。

$13<\sqrt{15n}<14$ なら、辺々をすべて 2 乗して、$169=13^2<15n<14^2<196$　$\frac{169}{15}<n<\frac{196}{15}$

$4\leqq\sqrt{\frac{120}{n}}<5$ なら、辺々をすべて 2 乗して、$16\leqq\frac{120}{n}<25$　ここからはちょっと難しいけれど、逆数を考えて、$\frac{16}{1}\leqq\frac{120}{n}<\frac{25}{1}$　より　$\frac{1}{25}<\frac{n}{120}\leqq\frac{1}{16}$　よって　$\frac{120}{25}<n\leqq\frac{120}{16}$ などと考えを進めていきます。

「平方根」この難しい単元をマスターするには、まずこのプリントに書いてある「平方根の概念」がきっちりわかって、さらにそれを固めるために、いろいろな問題にあたってみることです。困ったら、「√ の中身は先に計算してしまえ」「√ の外のプラスマイナスは、ふつうの計算と同じにあつかえ」「不等式が出てきたら、とにかく全部 2 乗してしまえ」などの「標語」を思い出し、すべての練習問題をやってしまいましょう。