式の計算の利用 — 授業再録

先日の授業は、内容も難しかった上、修学旅行のために休みも多かったので、きちんと家で宿題ができるかどうか不安です。先日の授業をかんたんにふりかえってみましょう。

まずは、P.31 の①から。⑴も⑵も、後ろの式をかんたんにしてから代入するのがコツ。
⑴なら　$(x+3y)(2x-y)-x(x+3y)=2x^2-xy+6xy-3y^2-x^2-3xy=\cdots$ これを整理してから代入です。
⑵なら　$(x-3y)^2-2x(x-2y)-9y^2=x^2-6xy+9y^2-2x^2+4xy-9y^2=\cdots$ これを整理する。
もちろん、⑵は、$\begin{cases} x+2y=2 \\ 3x+4y=1 \end{cases}$ の連立方程式を解いてから代入です。

次の、P.31 の②は重要な問題。$x+y=-3$,　$xy=1$ のとき、x がいくつ、y がいくつと、きちんと出せれば問題ありませんが、今の段階ではそれはできません（実は、第 3 章で二次方程式を習うので、それを習ってからなら求められます)。こういう問題はちょっとしたテクニックがいります。

⑴を 2 つのやり方で解いてみます。まずは、x^2+y^2 をうまく変形するやり方。これが正式なやり方ですが、スラスラ思いつくようになるためには、少し練習が必要です。
$x^2+y^2=x^2+2xy+y^2-2xy$　とまず変形します。途中に $2xy$ をたしてあるので、最後に $2xy$ をひく。そうすれば、式の量はかわりません。なぜ、$2xy$ をたしたのかというと、$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$ という公式があったから。
すると、$x^2+y^2=x^2+2xy+y^2-2xy=(x+y)^2-2xy$ と変形できたことになりますね。$x+y=-3$,　$xy=1$ とわかっているので、あとはこれを代入して、$(-3)^2-2\times1$ を計算すればよい。
もう 1 つのやり方は、$x+y=-3$ の両辺を 2 乗するやり方。$(x+y)^2=(-3)^2$ として、それぞれの辺を計算すると、$x^2+2xy+y^2=9$ となります。この式に、$xy=1$ を代入すると、$x^2+2+y^2=9$ となり、この 2 を移項すれば答えが出ます。どちらも同じ答えになりましたか。

⑵の$(x-y)^2+5xy$ や、⑶の$(x+y)^2-(x+2y)(2x+y)$の式も、同じように解きます。実は、こうした、x と y の比重が同じくらい入っている式は（難しいことばで、これは「対称式」とか「交代式」などの名前がついています)、必ず「$x+y$」と「xy」だけであらわされることがわかっています。
⑵のヒント→$(x-y)^2+5xy=x^2\underline{-2xy}+y^2\underline{+4xy+xy}=x^2-2xy+4xy+y^2+xy=\underline{x^2+2xy+y^2}+xy\cdots$続きはやってみましょう。
⑶のヒント→$(x+y)^2-(x+2y)(2x+y)$の後ろの式を考えてみると、$(x+2y)(2x+y)=2x^2+xy+4xy+2y^2=2x^2+4xy+2y^2+xy=2(x^2+2xy+y^2)+xy\cdots$ さあ、この続きはできますか。

次は P.31 の③です。⑴は、$x=2y$ のとき、$\dfrac{x^2+3xy+y^2}{x^2-3xy+y^2}$ の値を求めなさい。という問題です。だれだったか、聞きにきたのですが、分子の x^2 と分母の x^2 とかが、約分できるなんて思ってはいませんよね。いろいろ難しい問題をやってきたので、そろそろ頭の中が混乱してきましたか。例えば、$\dfrac{3+5-7}{3-5+7}$ で、3 と 3 が約分できますか。式の変形で迷ったら、なるべく小学校で習ったような、かんたんな数で確認すること。
ちょっと脱線してしまったので、次を続けます。$x=2y$ を、あとの式に代入すると、

$\dfrac{x^2+3xy+y^2}{x^2-3xy+y^2}=\dfrac{(2y)^2+3\times 2y\times y+y^2}{(2y)^2-3\times 2y\times y+y^2}$ となることがわかりますか。あとはこれを計算していってごらんなさい。最後に、分子の y^2 と分母の y^2 を約分します（ここは約分してもよいですよ）。

⑵は $x+y=2$, $xy=-5$ のとき、$\dfrac{x^2+3xy+y^2}{x^2-3xy+y^2}$ の値を求めなさい。という問題です。これは、分子と分母を別々に考えれば、②と同じなので、各自で考えてみてください。

④は、$a+\dfrac{1}{a}=3$ のとき、$a^2+\dfrac{1}{a^2}$ の値を求めなさい。という問題です。$a+\dfrac{1}{a}=3$ のとき、$a^2+\dfrac{1}{a^2}=9$ だなんて、勘違いしていませんか。$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=a^2+\dfrac{1}{a^2}$ ではありませんよ。$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ という公式があったのを覚えていますか。この b が $\dfrac{1}{a}$ にかわったと思ってください。

では、解いてみましょう。まず、$a+\dfrac{1}{a}=3$ の両辺を 2 乗してみます。この「両辺を 2 乗する」という手は、②の⑴の別解でも使いました。こういう問題で、「困ったとき」は、とにかく「両辺を 2 乗してみましょう」という合い言葉があります。

左辺を、公式に注意しながら展開すると、$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=a^2+2\times a\times\dfrac{1}{a}+\left(\dfrac{1}{a}\right)^2$ となり、真ん中の項は、a と a が約分できます。すると、この式は、$a^2+2+\dfrac{1}{a^2}=3^2=9$ となりました。あとは、2 を移項すればできあがりです。

では、どんどん進みましょう。P.31 の⑤は、どれも、「くふうして」計算すると楽になる問題です。たとえば⑴は、$79^2=(80-1)^2=80^2-2\times 80\times 1+12$　「$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ を使いました」というふうに「くふう」します。

⑵は $65^2-35^2=(65+35)\times(65-35)$　「どの公式を使ったか、もうわかりますよね」　⑶は $10.9\times 9.1=(10+0.9)\times(10-0.9)=10^2-(0.9)^2$　というふうに、残りの問題もできると思います。

ただし、⑸は、こんな感じに計算することもできます。まず、$303\times 298-302\times 297=(300+3)\times(300-2)-(300+2)\times(300-3)$ と考えます。そこで、$300=x$ として、この式全体を書き直すと、$(x+3)(x-2)-(x+2)(x-3)$ となることがわかりますか。

$(x+3)(x-2)-(x+2)(x-3)$ を計算すると、$x^2+x-6-(x^2-x-6)=x^2+x-6-x^2+x+6=\cdots$　おやまあ、このまま計算していくと、ずいぶんかんたんな式になりそうですね。かんたんな式に直ったら、ふたたび、$x=300$ におきもどして計算してください。

では次のページに進みましょう。テキストを 1 枚めくって、P.32 を開いてください。おうぎ形の問題が出ています。「おうぎ形の影をつけた部分の面積は、$a\lambda$ に等しいことを証明しなさい」という問題です。

方針はこんな感じです。おうぎ形の影をつけた部分の面積を、S として、まず S を計算してみます。その結果を「…①」としておきます。

次に、「λ」の長さを、問題のとおりに計算して、その結果を「…②」とします。この②と、さきほどの①をくらべて、①=②×a という関係になっていることを示せばよい。そんな方針でいってみましょう。

あれ、ちょっと待ってくださいよ。よく考えたら、このおうぎ形、中心角が何度とか、半径が何 cm とか、1 つも書いてありませんね。「これじゃ計算できないよ」というかもしれませんが、心配いりません。こういうときは、自分の好きな文字を使って、中心角や半径を表してしまえばよいのです。

中心角を $x°$、おうぎ形の半径を r cm としてみましょう。そうそう、おうぎ形の半径といっても、いろいろな置き方がありますよね。授業のときには、中心から、「λ」の通っている「点線」までを「r cm」として、証明しようとしました。ところが、模範解答では、小さい方のおうぎ形（白い部分です）の半径を r cm として証明してあります。置き方がちがっていてもいいのかなあ、と疑問に思うかもしれませんが、大丈夫です。どちらの置き方でも証明できます。

まずは、模範解答の方で考えてみましょう。小さい方おうぎ形の半径を r cm（実は、r cm ではなく、ただの r としてよいのですが、ここではイメージをつけやすくするために、r cm, a cm などと置くことにします）とします。中心角は $x°$とします（ふつう中心角のときは、文字「a」を使うことが多いのですが、この場合、道の幅に「a cm」が使ってあるため、「a」ではなく、「x」の文字にしました）。

影をつけた部分の面積を S cm^2 とすると、S は大きいおうぎ形から、小さいおうぎ形をひき算することによって求められます。小さい方のおうぎ形の半径を r としたので、大きい方のおうぎ形の直径が、$a+r$ となります。わかりますか。

すると、おうぎ形の面積=半径×半径×円周率×$\dfrac{中心角}{360°}$を思い出して計算すると、

S=大きいおうぎ形の面積−小さいおうぎ形の面積

$$=\underline{\underline{\pi}}\times(a+r)^2\times\underline{\underline{\frac{x°}{360°}}}-\underline{\underline{\pi}}\times r^2\times\underline{\underline{\frac{x°}{360°}}}$$

$$=\underline{\underline{\pi}}\times\{(a+r)^2-r^2\}\times\underline{\underline{\frac{x°}{360°}}}$$ （ここで、さりげなく「分配法則」を使っている）

$$=\pi\times(a^2+2ar+r^2-r^2)\times\frac{x°}{360°}$$

$$=\pi\times(\underline{a}^2+2\underline{a}r)\times\frac{x°}{360°}$$

$$=\pi\times a(a+2r)\times\frac{x°}{360°}$$

$$=a\cdot\pi\times(a+2r)\times\frac{x°}{360°}$$ …①とします。

次に、λの長さは、おうぎ形の弧の長さ=2×半径×円周率×$\dfrac{中心角}{360°}$を思い出してください。おうぎ形の中心から、「点線」の「λ」までの半径が、$r+\dfrac{a}{2}$ cm になることに注意すれば、$\lambda=2\times\pi\times\left(r+\dfrac{a}{2}\right)\times\dfrac{x°}{360°}=\pi\times2\left(r+\dfrac{a}{2}\right)\times\dfrac{x°}{360°}=\pi\times(a+2r)\times\dfrac{x°}{360°}$ …②と計算できます。

①と②をよく見てください。「①=a×②」になっていることがわかりますか。よって、「S=$a\lambda$」が成り立つことが証明できました。

ところで、授業で置いた置き方でも、うまく証明できるのでしょうか。授業では、中心から、「点線」の「λ」までの距離を、r cm と考えました。すると、大きいおうぎ形の半径

は、$r+\frac{a}{2}$ cm となり、小さいおうぎ形の半径は、$r-\frac{a}{2}$ cm となります。すると、

S=大きいおうぎ形の面積−小さいおうぎ形の面積

$$=\underline{\underline{\pi}}\times\left(r+\frac{a}{2}\right)^2\times\frac{x^\circ}{\underline{\underline{360^\circ}}}-\underline{\underline{\pi}}\times\left(r-\frac{a}{2}\right)^2\times\frac{x^\circ}{\underline{\underline{360^\circ}}}$$

$$=\underline{\underline{\pi}}\times\left\{\left(r+\frac{a}{2}\right)^2-\left(r-\frac{a}{2}\right)^2\right\}\times\frac{x^\circ}{\underline{\underline{360^\circ}}}$$

$$=\pi\times\left\{\left(r^2+2\times r\times\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}\right)-\left(r^2-2\times r\times\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}\right)\right\}\times\frac{x^\circ}{360^\circ}$$

$$=\pi\times\left(r^2+ar+\frac{a^2}{4}-r^2+ar-\frac{a^2}{4}\right)\times\frac{x^\circ}{360^\circ}$$

$$=\pi\times 2ar\times\frac{x^\circ}{360^\circ}$$

$=a\times 2\pi r\times\frac{x^\circ}{360^\circ}$…①となります。少々難しかったと思いますが、ついてこれましたか。

すると、「λ」までの長さを r cm としたので、λのほうは、まったく公式どおりで、$\lambda=2\pi r\times\frac{x^\circ}{360^\circ}$…②となります。①と②を見くらべれば、「S=$a\lambda$」が成り立つことは明らかですね。

さあ、あとひとがんばりです。⑦から⑨までは、証明問題、⑩は発展問題といってよいでしょう。証明問題の基本は、「左辺」=「右辺」を示したいとき、「左辺」を計算していったら、「右辺」になった。というものです。ところが、⑦や⑧では、その変形は思いつきにくい。こういうときは、「左辺」=…=…=（と計算していったら）=A…①となった。「右辺」=…=…=（と計算していったらこれも）=A…②となった。①と②がまったく同じ式になったので、①=②としてよい。すなわち、「左辺」=「右辺」が示された。という形式がよいでしょう。

ちょっと気をつけたいのは、最初に「左辺」=「右辺」という式を書き、それぞれを計算したら、A=A となった。という証明をよく見かけます。この書き方は、論理的にたいへんおかしい。「左辺」=「右辺」を示したいのに、最初に「左辺」=「右辺」と置いてはいけません。結論を先に書いてしまったことになるからです。こういう証明をよく書いた経験はありませんか。もしあったら、早く直してください。

では、⑦をやってみましょう。まず、連続した 3 つの整数を、$n-1, n, n+1$ とします（$n, n+1, n+2$ としてもできますが、こちらの方が計算は楽）。

「左辺」=まん中の数の平方=n^2…①　となるのは明らかですね。では、右辺はどうですか。

「右辺」=いちばん大きい数×いちばん小さい数＋1=$(n+1)(n-1)+1=n^2-1+1=n^2$…②となって、①=②が示されました。よって、「左辺」=「右辺」が成り立ちます。

こんな感じで、⑧もやってみましょう。⑧は⑦と同じようにできると思います。

⑨では、「割られる数÷割る数＝商…あまり」の式を、「割られる数＝割る数×商＋あまり」に変形して考えます。たとえば、「65÷7=9…2」を「65=7×9+2」のように考えるのです。小学生のときにやった、「あまりのあるわり算のたしかめをしなさい」という問題を思い出してください。

ある整数÷3 の商を a とします。すると、問題より、ある整数÷3=a…2 となりますが、

それを、ある整数=$3a+2$ に変形するのです。これはよく使いますので、まだ慣れていない人は、一刻もはやくできるようにしてほしい基本事項です。

この、「ある整数」を 2 乗すればよいので、$(3a+2)^2$ を考えればよいことがわかるでしょう。$(3a+2)^2=9a^2+12a+4$ となりますが、そこからどうしましょう。これを 3 で割ると、あまりが 1 になるということは、この式が「3×□＋1」のように変形できることと同じです。よく、「$9a^2+12a+4$」の式をみてください。$9a^2$ も $12a$ も 3 で割りきれることがわかりますね。すなわち、$9a^2=3\times3a^2$、$12a=3\times4a$ と書けることになります。最後の 4 はどうしましょう。4=3+1（あたりまえ）ですね。でも、なぜ 4 を 3 と 1 に分けるのか、わかりますか。

結局、$(3a+2)^2=9a^2+12a+4=3\times3a^2+3\times4a+3+1=3\times(3a^2+4a+1)+1$ となりました。これと、「割られる数＝割る数×商＋あまり」の式をくらべてみましょう。
$(3a+2)^2=3\times(3a^2+4a+1)+1$ の式は、$(3a+2)^2$ を 3 で割ったら、商が$(3a^2+4a+1)$となって、あまりが 1 となることを示していませんか。これで⑨が証明できたことになります。

いよいよ最後の問題になりましたね。⑩の問題は、□をうめる問題ですが、ここまできたら、正式にこの問題を考えてみましょう。
この問題は、「$xy+3x+y=9$ を満たす自然数 x, y の組を、あるだけ探しなさい」という問題です。まずは、$xy+3x+y=9$ の両辺に 3 をたすと、$xy+3x+y+3=9+3=12$ となります。「なぜ 3 をたすのですか」という声が聞こえてきそうですね。そこが難しいところです。因数分解の練習をたっぷり積んだ人のみ、「なぜ 3 なのか」がわかるのではないでしょうか。たとえば、前の章に、「$xy-6x-y+6$」「$ax-2ay+bx-2by$」「$3x^2+xy-3x-y$」のような因数分解が出ていましたよ。どうやってやるのでしたっけ。

$xy-6x-y+6=x(y-6)-(y-6)=$ …続きはやってみよう。
$ax-2ay+bx-2by=a(x-2y)+b(x-2y)=$ …続きはやってみよう。
$3x^2+xy-3x-y=x(3x+y)-(3x+y)=$ …続きはやってみよう。

やれましたか。こうした練習を積んだ人なら、「$xy+3x+y$」に「3」をたせば、
$xy+3x+y+3=x(y+3)+(y+3)=x\mathrm{A}+\mathrm{A}=(x+1)\mathrm{A}=(x+1)(y+3)$ …というふうに「因数分解」できることを思いつくのです。

すると、問題の式は、$(x+1)(y+3)=12$ となりましたね。ここで、x や y は自然数だから、$x+1$ や $y+3$ も自然数になります。12=1×12=2×6=3×4=4×3=6×2=12×1 と 12 の約数が 6 通りあるので、この問題も 6 通りの答えがあるような気がしますね。6 通りも調べる必要があるのかなあ。調べる前に少し考えてみましょう。

さきほど、「$x+1$ や $y+3$ も自然数になります」と言いましたが、ここをよく考えてみてください。x は自然数なので、$x\geqq1$（x は 1 以上の数）ですよね。すると、$x+1\geqq1+1=2$（x+1 は 2 以上）の自然数となることはわかりますか。同様に、$y+3\geqq1+3=4$（$y+3$ は 4 以上）の自然数となります。すると、$x+1=2, y+3=6$ の場合と、$x+1=3, y+3=4$ の場合の、2 通りだけ調べればよいことに気づきます。あとは自分で答案を仕上げることができますか。

お疲れ様でした。これで、先日の授業のおおまかなあらすじは終わりです。このプリントをもとに、P.31 と P.32 を仕上げ、次の授業までに、P.33～P.35 まで、挑戦してきてください。「There is no royal road to learning（学問に王道なし）」1 つ 1 つ、ていねいに仕上げましょう。